T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni

EGZAMIN I

Wrocław, **piątek 13** czerwca 2008

ZADANIE 1. (7p)
Dana jest przestrzeń metryczna (X, d). Niech

$$d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Sprawdź,
A) że d_1 jest metryką (sprawdź starannie warunek trójkąta);
B) że d_1 (wiedząc, że jest metryką) jest równoważna z d.

ROZW.
A) mamy:

$$\begin{gathered} d_1(x,y) + d_1(y,z) = \min\{d(x,y),1\} + \min\{d(y,z),1\} = \\ \min\{d(x,y)+d(y,z),\ d(x,y)+1,\ 1+d(y,z),\ 1+1\} \geq \\ \min\{d(x,z),1,1,1\} = d_1(x,z) \end{gathered}$$

B) oczywiście $d_1 \leq d$ więc zbieżność w d implikuje zbieżność w d_1. Na odwrót: Niech ciąg $x_n \to x$ w d_1. To znaczy, że dla dostatecznie dużego n, $d_1(x_n, x) < 1$. Ale wtedy $d_1(x_n, x) = d(x_n, x)$ i skoro jest zbieżność w d_1 to i w d.

ZADANIE 2. (8p)
Udowodnij, że zupełność metryki d na przestrzeni X jest równoważna z poniższym warunkiem. Trzeba udowodnić implikacje w obie strony:
A) $\Longrightarrow$
B) $\Longleftarrow$
Warunek: Jeśli F_n jest zstępującym ciągiem niepustych zbiorów domkniętych w X o średnicach malejących do zera, to $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

ROZW.
A) Zakładamy zupełność. Z każdego zbioru F_n wybieramy po jednym punkcie x_n. Otrzymany ciąg jest podstawowy, gdyż wszystkie elementy x_n o indeksach powyżej n_0 są w F_{n_0}, a więc ich wzajemne odległości nie przekraczają średnicy zbioru F_{n_0}, która dla dostatecznie dużego n_0 jest odpowiednio mała. Z zupełości ciąg x_n ma granicę x. Z domkniętości każdego ze zbiorów F_n, $x \in F_n$ (bo ciąg x_n od miejsca n leży w F_n). Zatem x należy do przekroju wszystkich F_n, czyli przekrój ten jest niepusty.
B) Załóżmy ten warunek o zbiorach. Weźmy ciąg podstawowy ale nie zbieżny x_n. Ponieważ ciąg podstawowy mający podciąg zbieżny jest zbieżny, więc nasz ciąg nie ma podciągów zbieżnych. Zatem zbiory $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ są domknięte. Ponadto są zstępujące, a ich średnice dążą do zera (podstawowość), oraz ich przekrój jest pusty (bo brak podciągów zbieżnych implikuje też, że każdy punkt występuje w tym ciągu co najwyżej skończnie wiele razy, zatem nie występuje w przekroju). Sprzeczność.

ZADANIE 3. (8p)
A) Udowodnij, że jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją ciągłą z jednej przestrzeni metrycznej w drugą, to jej wykres $F = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$ z metryką maximum. Podaj przykład na to, że odwrotna implikacja nie zachodzi (ale weź pod uwagę, co mówi punkt B)).
B) Wykaż, że jeśli Y jest zwarta, to domkniętość wykresu F implikuje ciągłość f.

ROZW.
A) Niech ciąg punktów z wykresu $(x_n, f(x_n))$ zbiega do jakiegoś (x, y) w produkcie. Oznacza to, że $x_n \to x$ i $f(x_n) \to y$. Z ciągłości, $f(x_n)$ musi zbiegać do $f(x)$, czyli $y = f(x)$. Stąd punkt graniczny (x, y) to $(x, f(x))$ i należy on do wykresu. To dowodzi domkniętości wykresu.

Niech $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1)$, $f(x) = x$ z tym, że $f(1) = 0$. Wykres jest domknięty w produkcie, bo ,,brakujący" punkt $(1, 1)$ nie należy do przestrzeni produktowej. Funkcja oczywiście nie jest ciągła w $x = 1$.

B) Niech Y będzie zwarta a wykres domknięty. Niech $x_n \to x$ w X. Wtedy z każdego podciągu $f(x_n)$ można wybrać podciąg zbieżny. Trzeba pokazać, że zawsze do tej samej granicy $f(x)$, to da zbieżność całego ciągu $f(x_n)$ do $f(x)$ czyli ciągłość. Więc weźmy podciąg $f(x_{n_k})$ zbieżny do jakiegoś y. Wtedy ciąg $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ zbiega w produkcie do (x, y). Z domkniętości wykresu, punkt ten (czyli para (x, y)) należy do wykresu. Ale to oznacza, że $y = f(x)$, co właśnie trzeba było pokazać.

ZADANIE 4. (8p)
A) = B) Znajdź granicę (w metryce supremum) ciągu rekurencyjnego funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0, \frac{1}{2}]$: $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt + 1$.

ROZW. Na $C([0, \frac{1}{2}])$ (z metryką supremum) rozważamy odwzorowanie $T(f) = g$ gdzie $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt{+}1$. Jest to odwzorowanie Lipschitzowskie ze stałą $\frac{1}{2}$, bo jeśli dwie funkcje są oddalone o (co najwyżej) r, to ich całki od zera do x są oddalone o co najwyżej rx. Ponieważ $x \leq \frac{1}{2}$, to mamy szacowanie przez $\frac{1}{2}r$. No to teraz wystarczy znaleźć punkt (czyli funkcję) stały względem T. Czyli funkcję spełniającą

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt + 1.$$

Łatwo widać, że $f(x) = e^x$ spełnia to równanie. Czyli ciąg nasz dąży do e^x.

ZADANIE 5. (6p)
A)= B) Podaj przykład metryki na prostej $\mathbb{R}$ równoważnej ze zwykłą metryką d ,,moduł różnicy", która jest ograniczona ale nie całkowicie ograniczona.
Wskazówka: wykorzystaj coś, co jest w zadaniach z tej listy.

ROZW. Wystaczy wziąć metrykę $d_1 = \min\{d, 1\}$. Przestrzeń $(\mathbb{R}, d_1)$ jest ograniczona (zawarta w kuli o promieniu 1 wokół zera (lub dowolnego innego punktu)). Natomiast nie jest całkowicie ograniczona, bo kule o promieniu $\frac{1}{2}$ są takie same jak dla d i nie pokryjemy prostej skończenie wieloma takimi kulami. Równoważność d_1 z d wynika z zadania 1.

ZADANIE 6. (7p)
Udowodnij, że na prostej ze zwykłą metryką zbiór $A = [0, 1) \cup (2, 3] \cup [4, 5) \cup \cdots$ jest typu
A) G_δ
B) F_σ.

ROZW.
A) Niech $U_n = (-\frac{1}{n}, 1) \cup (2, 3+\frac{1}{n}) \cup (4-\frac{1}{n}, 5) \cup \dots$. Jest to zbiór otwarty i przekrój (przeliczalny) zbiorów U_n daje A. Więc A jest typu G_δ.
B) Niech $F_n = [0, 1-\frac{1}{n}] \cup [2+\frac{1}{n}, 3] \cup [4, 5-\frac{1}{n}] \cup \dots$. Jest to zbiór domknięty (ale nie dlatego, że jest sumą przedziałów domkniętych, tylko dlatego, że dopełnienie jest otwarte). Zbiór A jest sumą (przeliczalną) zbiorów F_n, czyli jest typu F_σ.

ZADANIE 7. (6p)
A) Podaj definicję zbioru I kategorii (definiując pojęcia pośrednie).
B) Sformułuj twierdzenie Baire'a.

Tomasz Downarowicz